

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: aplicaciones e interpretación

## Nivel superior

### Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#### Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



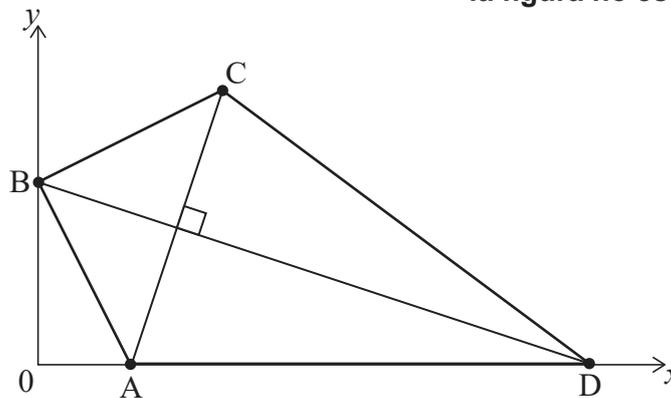
Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Dilara está diseñando una cometa (ABCD) en unos ejes de coordenadas en los que una unidad representa 10 cm.

Las coordenadas de A, B y C son (2, 0), (0, 4) y (4, 6) respectivamente. El punto D está en el eje  $x$ . [AC] es perpendicular a [BD]. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



- (a) Halle la pendiente de la recta que pasa por A y C. [2]
- (b) Escriba la pendiente de la recta que pasa por B y D. [1]
- (c) Halle la ecuación de la recta que pasa por B y D. Dé la respuesta en la forma  $ax + by + d = 0$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $d$  son números enteros. [2]
- (d) Escriba la coordenada  $x$  del punto D. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)







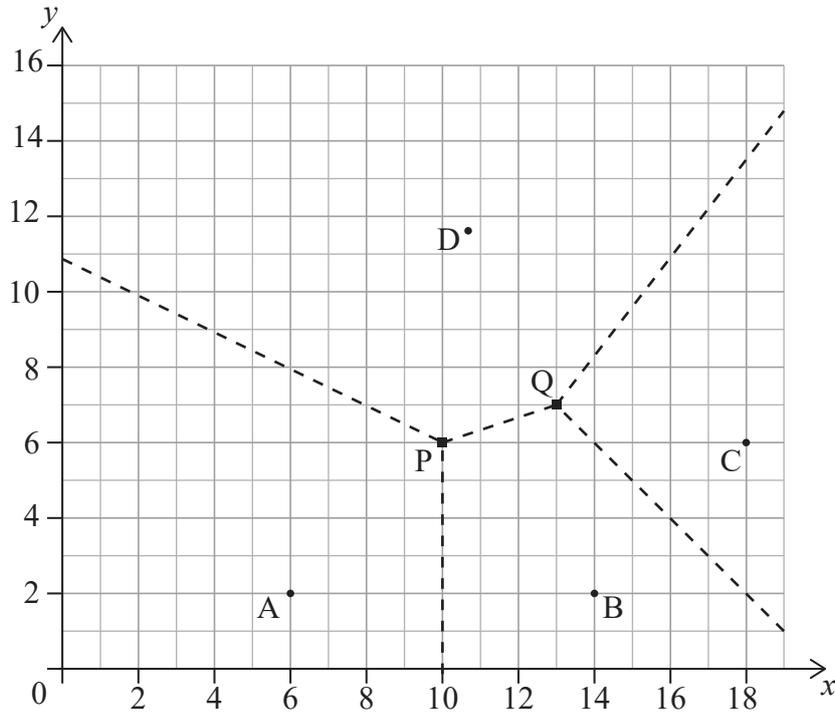


4. [Puntuación máxima: 6]

Hay cuatro estaciones que utilizan los guardas forestales de un parque nacional.

En el siguiente diagrama de Voronoi, las coordenadas de las estaciones son  $A(6, 2)$ ,  $B(14, 2)$ ,  $C(18, 6)$  y  $D(10,8; 11,6)$ , donde las distancias vienen dadas en kilómetros.

Las líneas discontinuas representan los límites de las regiones que patrullan los guardas forestales de cada estación. Los límites coinciden en  $P(10, 6)$  y en  $Q(13, 7)$ .



Con el fin de reducir el área de las regiones que patrullan los guardas forestales, se va a construir una nueva estación dentro del cuadrilátero ABCD. La nueva estación se ubicará de tal manera que esté lo más lejos posible de la estación existente más próxima.

(a) Muestre que la nueva estación se debería construir en P. [3]

Se va a actualizar el diagrama de Voronoi para incluir la región que rodea a la nueva estación ubicada en P. Por ello, se han añadido al siguiente diagrama las aristas definidas por las mediatrices de [AP] y de [BP].

- (b) (i) Escriba la ecuación de la mediatriz de [PC].
- (ii) A partir de lo anterior, dibuje con precisión en el siguiente diagrama los límites que faltan de la región que rodea a P. [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



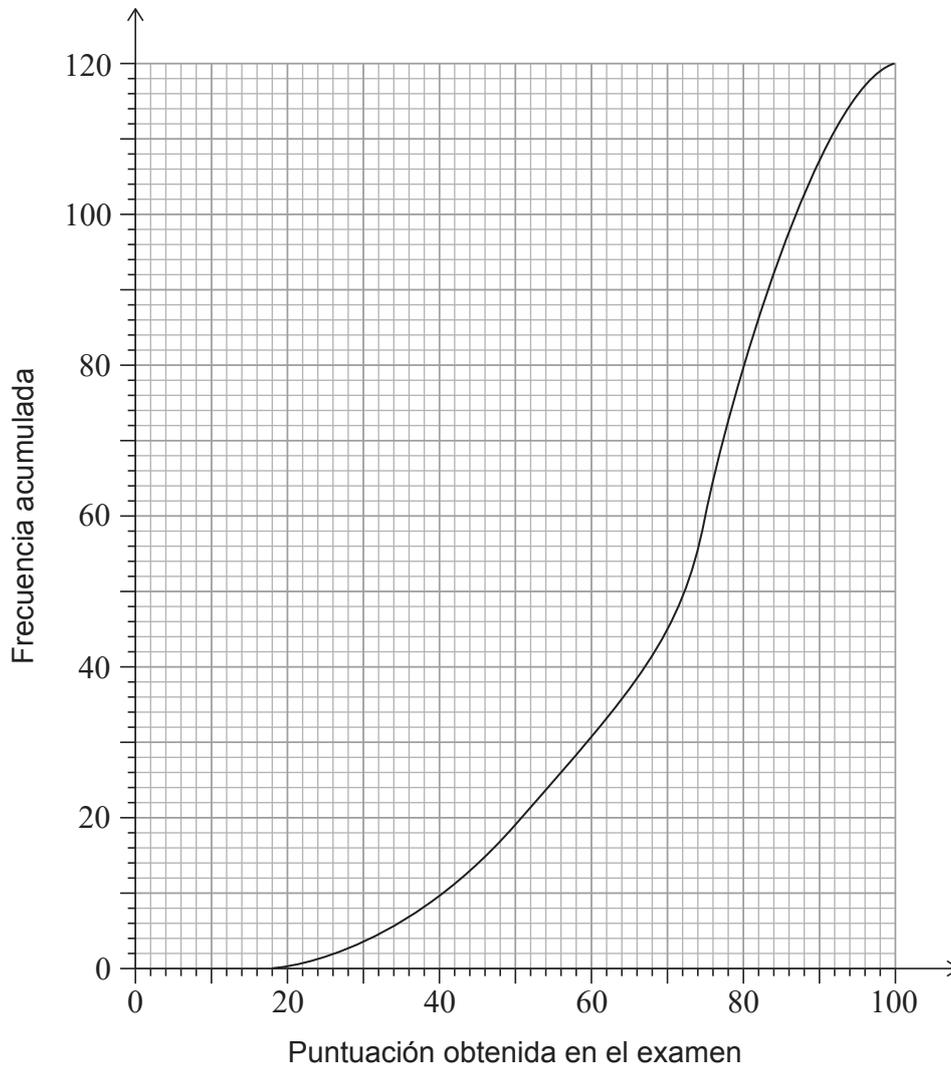






7. [Puntuación máxima: 8]

Un grupo de 120 alumnos se ha presentado a un examen de Historia. El siguiente gráfico de frecuencia acumulada muestra las puntuaciones que han obtenido los alumnos.



(a) Halle la mediana de las puntuaciones obtenidas.

[1]

A los alumnos se les concedió una calificación de entre 1 y 5, dependiendo de la puntuación que hubieran obtenido en el examen. En la siguiente tabla se muestra el número de alumnos que recibieron cada calificación.

<b>Calificación</b>	1	2	3	4	5
<b>Número de alumnos</b>	6	13	26	$a$	$b$

(b) Halle una expresión que dé  $a$  en función de  $b$ .

[2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



28EP10



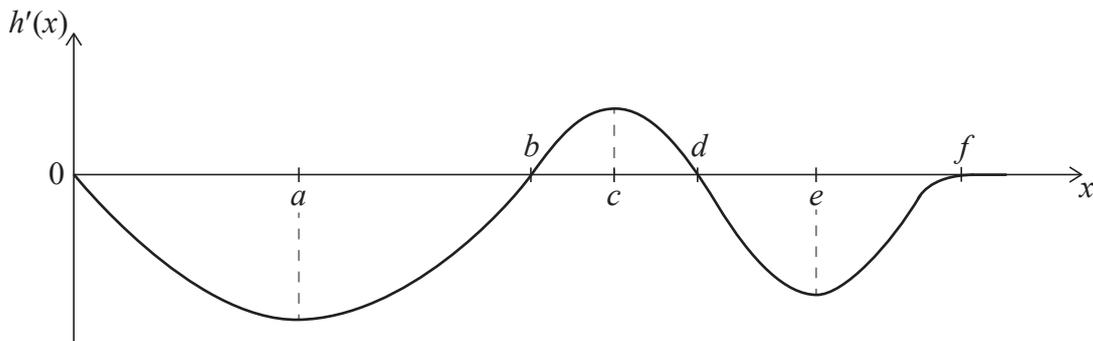
8. [Puntuación máxima: 5]

Juri esquía desde la cima de una colina hasta un punto final que se encuentra al pie de la colina. Toma la ruta más corta, dirigiéndose directamente al punto final (F).



Sea  $h(x)$  la altura de la colina respecto a F a una distancia horizontal  $x$  del punto de salida, situado en la cima de la colina.

El gráfico de la **derivada** de  $h(x)$  se muestra a continuación. Este gráfico de  $h'(x)$  tiene máximos y mínimos locales para  $x$  igual a  $a$ ,  $c$  y  $e$ . El gráfico de  $h'(x)$  corta al eje  $x$  cuando  $x$  es igual a  $b$ ,  $d$ , y  $f$ .



- (a) (i) Identifique la coordenada  $x$  del punto en el cual  $|h'(x)|$  alcanza su valor máximo.
- (ii) Interprete este punto en el contexto de la pregunta.

[2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**





**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

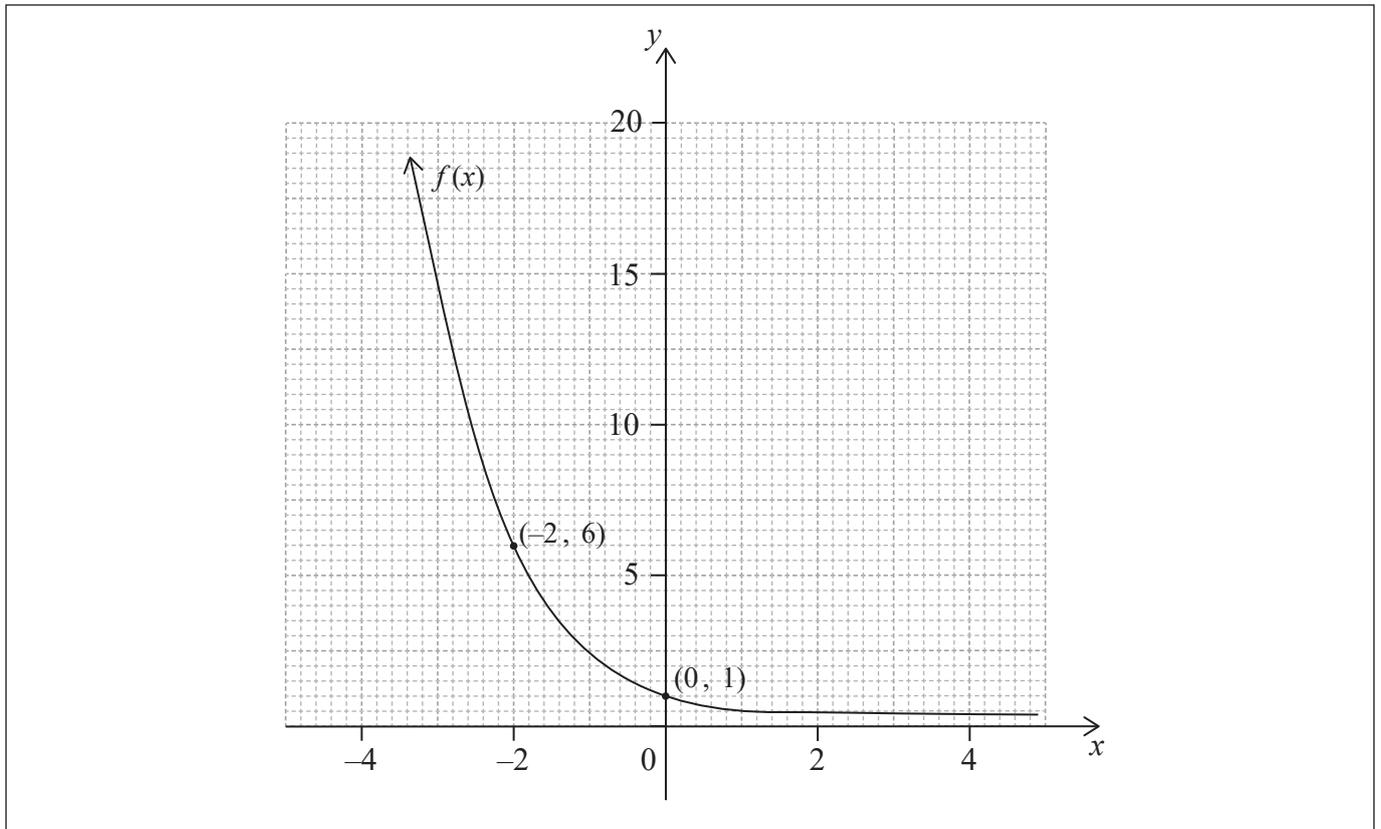


28EP14



10. [Puntuación máxima: 4]

El gráfico de  $y = f(x)$  se muestra en los siguientes ejes de coordenadas. El gráfico pasa por los puntos  $(-2, 6)$  y  $(0, 1)$ , y tiene una asíntota horizontal en  $y = 0$ .



Sea  $g(x) = 2f(x - 2) + 4$ .

- (a) Halle  $g(0)$ . [2]
- (b) En esos mismos ejes de coordenadas, dibuje con precisión el gráfico de  $y = g(x)$ , mostrando todos los cortes con los ejes y todas las asíntotas que haya. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**







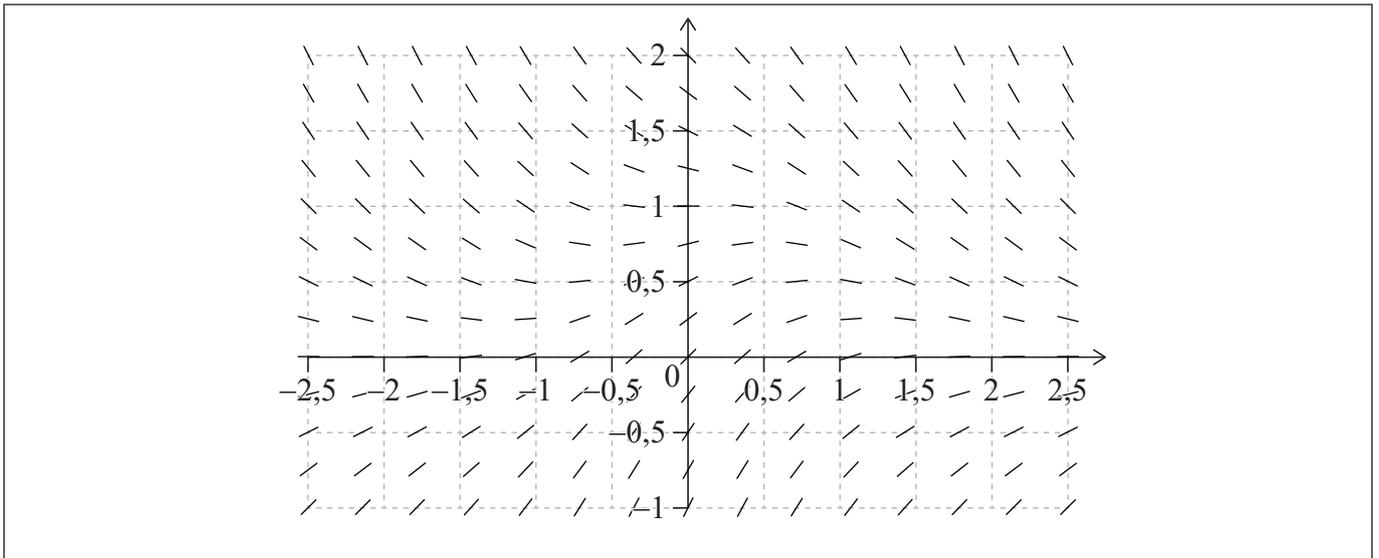


13. [Puntuación máxima: 7]

El campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} - y$  se muestra en los dos gráficos siguientes.

(a) Calcule el valor de  $\frac{dy}{dx}$  en el punto (0, 1). [1]

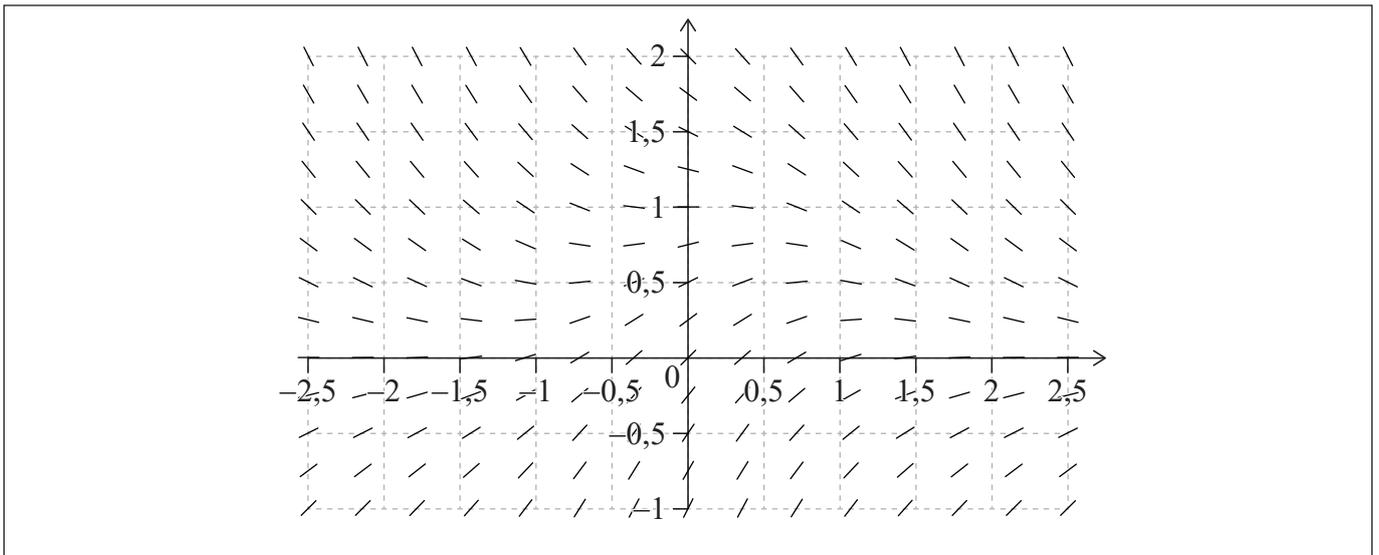
(b) Dibuje aproximadamente, en el primer gráfico, una curva que represente los puntos en los que  $\frac{dy}{dx} = 0$ . [2]



(c) En el segundo gráfico:

(i) Dibuje aproximadamente la curva solución que pasa por el punto (0, 0).

(ii) Dibuje aproximadamente la curva solución que pasa por el punto (0, 0,75). [4]



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

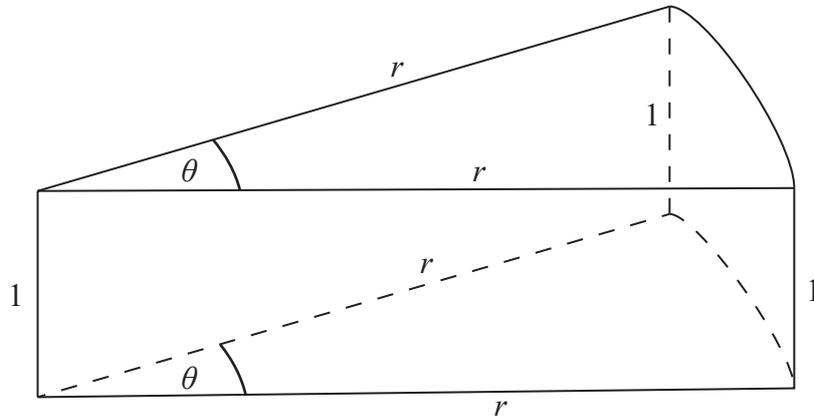






15. [Puntuación máxima: 9]

La siguiente figura muestra una estructura hecha de alambre. La longitud total de alambre es igual a 15 cm. La estructura está compuesta por dos sectores circulares idénticos que son paralelos entre sí. Los sectores circulares subtenden un ángulo de  $\theta$  radianes y tienen un radio de  $r$  cm. Están conectados mediante alambres de 1 cm de longitud y perpendiculares a los sectores circulares. Toda esta información se muestra en el siguiente diagrama.



(a) Muestre que  $r = \frac{6}{2 + \theta}$ . [2]

Las caras de la estructura se recubren de papel para delimitar un volumen  $V$ .

- (b) (i) Halle una expresión que dé  $V$  en función de  $\theta$ .
- (ii) Halle la expresión  $\frac{dV}{d\theta}$ .
- (iii) Resuelva por métodos algebraicos  $\frac{dV}{d\theta} = 0$  para hallar el valor de  $\theta$  que maximiza el volumen  $V$ . [7]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Véase al dorso





**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



28EP26

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



28EP27

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



28EP28